

# Viszkoelasztikus anyagok, anyagmodellek rendszerteknikai szemléletben

Molnár László – Valenta László\*

## Bevezetés

A viszkoelasztikus anyagmodelleket a polimerek kifejezetten jellemző tulajdonságainak (pl. kúszás, feszültségrelaxáció) időtartománybeli viselkedésének vizsgálatához használunk. Ha egy hasonló tulajdonságú anyagot tartalmazó szerkezet viselkedését az idő-, vagy a frekvenciatartományban akarjuk vizsgálni, szintén ezen viszkoelasztikus modellekkel dolgozunk, de ekkor már a rugó (k) és csillapító (b) elemekből felépített koncentrált paraméterű modell nem önmagában az anyagot modellezi, hanem az egész szerkezetet.

A polimerek frekvenciafüggő anyagtulajdonsága miatt tekintjük át az alapvető viszkoelasztikus modelleket s állítsuk elő a mechanikai impedanciájukat.

### Kelvin-Voight-modell (1. ábra)

Ez a modell egy ideális disszipatív (b) és egy ideális rugalmas (k) elem párhuzamos kapcsolása. A polimerek kúszását szokás modellezni vele.

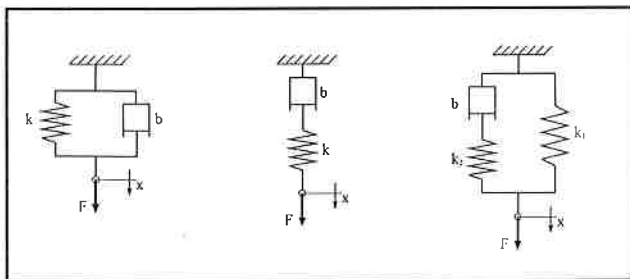
A működő erő a koncentrált paraméterek (k, b) és a keresztváltó (v) függvényében:

$$F(t) = k \int_{t_0}^t v \, d\tau + b \cdot v \quad (1)$$

Laplace-transzformálva az (1) egyenletet a mechanikai impedanciára kapjuk:

$$Z_{KV}(j\omega) = \frac{v(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{\left(\frac{k}{j\omega} + b\right)} = \frac{j\omega}{b \cdot j\omega + k} \quad (2)$$

### Maxwell-modell (2. ábra)



1. ábra. Kelvin-Voight modell      2. ábra. Maxwell-modell      3. ábra. Standard-Solid-modell

A Maxwell-modell egy ideális disszipatív (b) és egy ideális rugalmas (k) elem sorba kapcsolása. A polimerek feszültségrelaxációját közelíti. Az elmozdulás az F erő hatására:

$$x(t) = \frac{F}{k} + \int_{t_0}^t v \, d\tau = \frac{F}{k} + \frac{1}{b} \int_{t_0}^t F \, d\tau \quad (3)$$

A (3) egyenlet Laplace-transzformációja után:

\* Finommechanikai, Optikai Tanszék, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,

$$x(s) = \frac{F(s)}{k} + \frac{1}{b} \cdot \frac{F(s)}{s} = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{b \cdot s}\right) \cdot F(s) = \left(\frac{b \cdot s + k}{k \cdot b \cdot s}\right) \cdot F(s) \quad (4)$$

Felhasználva összefüggést a mechanikai impedanciára kapjuk:

$$Z_M(j\omega) = \frac{v(j\omega)}{F(j\omega)} = \left(\frac{j\omega}{k} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{k} \cdot j\omega + \frac{1}{b} \quad (5)$$

### Standard-Solid-modell (3. ábra)

A modell egy Maxwell-elem és egy ideális rugalmas elem párhuzamos kapcsolásából áll, és szintén a polimerek feszültségrelaxációját közelíthetjük vele.

A működő erő a koncentrált paraméterek (k<sub>1</sub>, k<sub>2</sub>, b) és a keresztváltó (v) függvényében a (4) egyenlet valamint az  $x(s) = \frac{v(s)}{s}$  felhasználásával:

$$F(s) = \frac{k_1}{s} \cdot v(s) + \frac{k_2 \cdot b}{b \cdot s + k_2} \cdot v(s) = \left(\frac{k_1}{s} + \frac{k_2 \cdot b}{b \cdot s + k_2}\right) \cdot v(s) \quad (6)$$

A (6) egyenletből a mechanikai impedancia:

$$Z_{SS}(s) = \frac{v(s)}{F(s)} = \frac{1}{\frac{k_1}{s} + \frac{k_2 \cdot b}{b \cdot s + k_2}} = \frac{s \cdot (b \cdot s + k_2)}{k_1 \cdot (b \cdot s + k_2) + k_2 \cdot b \cdot s} = \frac{b \cdot s^2 + k_2 \cdot s}{(k_1 + k_2) \cdot b \cdot s + k_1 \cdot k_2} \quad (7)$$

$$Z_{SS}(j\omega) = \frac{k_2 \cdot j\omega - b \cdot \omega^2}{(k_1 + k_2) \cdot b \cdot j\omega + k_1 \cdot k_2} \quad (8)$$

1. táblázat Viszkoelasztikus modellek mechanikai impedanciái

	Viszkoelasztikus modellek		
	Kelvin-Voight	Maxwell	Standard-Solid
Mechanikai impedancia [Z(jω)]	$\frac{j\omega}{b \cdot j\omega + k}$	$\frac{j\omega}{k} + \frac{1}{b}$	$\frac{k_2 \cdot j\omega - b \cdot \omega^2}{(k_1 + k_2) \cdot b \cdot j\omega + k_1 \cdot k_2}$

## Egyszerű mechanikai terhelesű szerkezetek koncentrált paraméterelemei a viszkoelasztikus modellek alapján

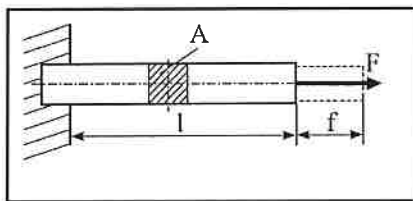
A továbbiakban vizsgálatra kerülő szerkezetek anyaga szilikongumi. Ezen anyagok rugalmas alakváltozása lényegesen nagyobb a fémek arányossági határánál. A nem csak fémekre használt összefüggések a kis alakváltozásokra érvényesek.

### Egytengelyű húzás

Az egyik végén befogott l hosszúságú, A keresztmetszetű rúd F húzóerő hatására f értékkel megnyúlik (4. ábra). Az anyag viselkedését a lineáris anyagtörvény alapján az E Young-modulussal jellemezzük.

A rúd megnyúlása:

$$f = \frac{F \cdot l}{A \cdot E} \quad (9)$$



4. ábra. Egyik végén befogott rúd húzása

A rendszer keresztváltozója:  $\frac{df}{dt}$ , az átmenő változója pedig a húzóerő (F). Így az impedancia a (9) egyenlet felhasználásával:

$$Z(s) = \frac{f(s) \cdot s}{F(s)} = \frac{E(s) \cdot A}{F(s)} = \frac{l \cdot s}{E(s) \cdot A} \quad (10)$$

A bevezetőben említettek alapján a polimerek, köztük a szilikonumi mechanikai anyagjellemzői is komplex mennyiségek. Így a Young-modulus (E), és a csúszató rugalmassági modulus (G) is komplex mennyiségek.

$$E = E' + j E'' = E' + j \operatorname{tg} \delta(\omega) \cdot E' = E' \cdot (1 + j \operatorname{tg} \delta(\omega)) \quad (11)$$

$$G = G' + j G'' = G' + j \operatorname{tg} \delta(\omega) \cdot G' = G' \cdot (1 + j \operatorname{tg} \delta(\omega)) \quad (12)$$

A (11), (12) egyenletekben E', G' a tárolási, vagy rugalmassági modulusok, az E'', és a G'' pedig a veszteségi modulusok. A veszteségi és a tárolási modulusok között a frekvenciafüggő veszteségi tényező, a  $\operatorname{tg} \delta(\omega)$  teremt kapcsolatot:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{E''}{E'} = \frac{G''}{G'} \quad (13)$$

Ezek alapján az egyik végén befogott húzással terhelt rúd impedanciája:

$$Z(j\omega) = \frac{l \cdot j\omega}{A \cdot E' \cdot j \operatorname{tg} \delta(\omega) + A \cdot E'} \quad (14)$$

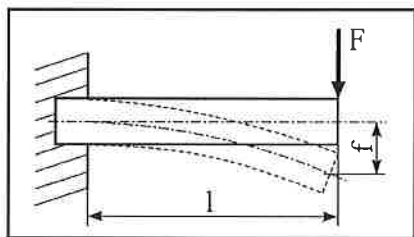
A (14) egyenlet a legnagyobb formai hasonlóságot az 1. táblázat impedanciái közül a Kelvin-Voight-féle mechanikai impedanciával mutat. A két kifejezést összevetve a rendszer merevsége, ill. csillapítása a Kelvin-Voight-féle kapcsolásnak megfelelően:

$$k = \frac{A \cdot E'}{l}, \quad b = \frac{A \cdot E'}{l} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta(\omega)}{\omega} \quad (15)$$

Így a csillapítás mértéke függ a szerkezet merevségétől.

**Egyik végén befogott rúd hajlítása**

Az egyik végén befogott l hosszúságú rúd, melynek a hajlítás tengelyére számított másodrendű nyomatéka I, az F-I hajlítónyomaték hatására f értékkel lehajlik (5. ábra). Az anyag viselkedését a lineáris anyag-törvény alapján az E Young-modulussal jellemezzük. A rúd lehajlása:



5. ábra. Egyik végén befogott rúd hajlítása

$$f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad (16)$$

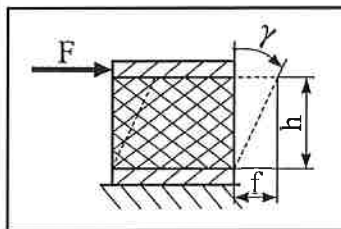
A rendszer kereszt, ill. átmenő változója megegyezik az előző pontban (4. ábra) ismertetettekkel. Így a (16) egyenlet, valamint a (11) felhasználásával az egyik végén befogott hajlítással terhelt rúd impedanciája:

$$Z(j\omega) = \frac{l^3 \cdot j\omega}{3 \cdot E' \cdot I \cdot j \operatorname{tg} \delta(\omega) + 3 \cdot E' \cdot I} \quad (17)$$

A rendszer merevsége, ill. csillapítása a Kelvin-Voight-féle kapcsolásnak megfelelően:

$$k = \frac{3 \cdot E' \cdot I}{l^3}, \quad b = \frac{3 \cdot E' \cdot I}{l^3} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta(\omega)}{\omega} \quad (18)$$

**Nyírásra igénybevett állandó keresztmetszetű gumielem**



6. ábra. Nyírásra igénybevett gumielem

Az F nyíróerő hatására a h magasságú, A keresztmetszetű gumielem elmozdulása (6. ábra):

$$f = \frac{F \cdot h}{A \cdot G} \quad (19)$$

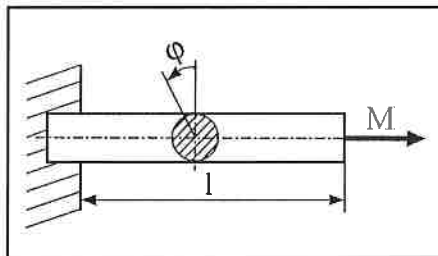
A (19) és a (12) egyenletekből a nyírásra igénybevett gumielem impedanciája:

$$Z(j\omega) = \frac{h \cdot j\omega}{A \cdot G' \cdot j \operatorname{tg} \delta(\omega) + A \cdot G'} \quad (20)$$

A rendszer merevsége, ill. csillapítása a Kelvin-Voight-féle kapcsolásnak megfelelően:

$$k = \frac{A \cdot G'}{h}, \quad b = \frac{A \cdot G'}{h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta(\omega)}{\omega} \quad (21)$$

**Egyik végén befogott rúd csavarása**



7. ábra. Egyik végén befogott rúd csavarása

Az M csavarónyomatékkal terhelt, l hosszúságú, I<sub>p</sub> poláris másodrendű nyomatékkal rendelkező rúd szögelfordulása a rúd végén (7. ábra):

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{I_p \cdot G} \quad (22)$$

A rendszer keresztváltozója:  $\frac{d\varphi}{dt}$ , az átmenő változója a csavarónyomaték (M). Így az impedancia a (22) egyenlet felhasználásával:

$$Z(s) = \frac{s \cdot \varphi(s)}{M(s)} = \frac{s \cdot l}{I_p \cdot G(s)} \quad (23)$$

Továbbá a (12) egyenlettel a (23)-ból kapjuk:

$$Z(j\omega) = \frac{l \cdot j\omega}{I_p \cdot G' \cdot j \operatorname{tg} \delta(\omega) + I_p \cdot G'} \quad (24)$$

A rendszer merevsége, ill. csillapítása a Kelvin-Voight-féle kapcsolásnak megfelelően:

$$k = \frac{I_p \cdot G'}{l}, \quad b = \frac{I_p \cdot G'}{l} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta(\omega)}{\omega} \quad (25)$$

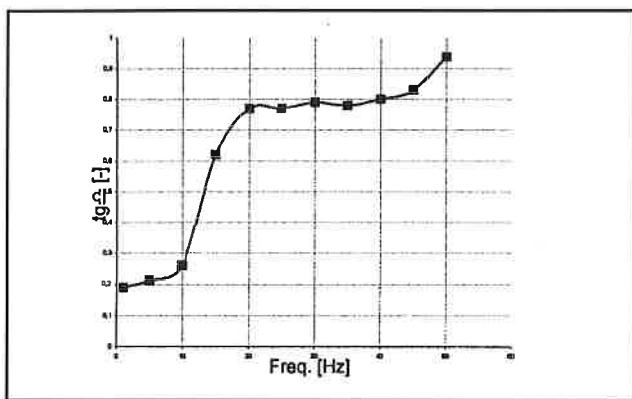
Általánosságban megállapítható, hogy a Kelvin-Voight-féle kapcsolással modellezett rendszerek csillapítása:

$$b = k \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta(\omega)}{\omega} \quad (26)$$

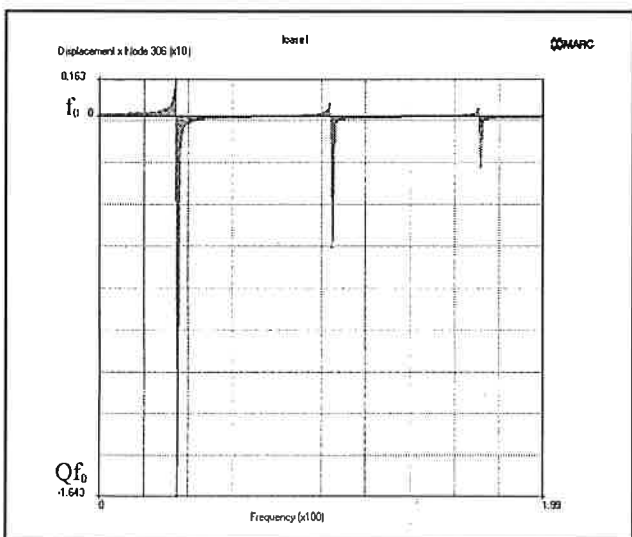
Határozzuk meg a 4. ábrán szemléltetett rendszer merevségét és csillapítását analitikusan az előállított összefüggésekkel, valamint módális analízissel végeelem felhasználásával.

### A rendszer koncentrált parametereinek (k, b) meghatározása modális analízissel

Az egyik végén befogott húzásra igénybevett rúd geometria adatai a következők:  $A=10 \times 10 \text{ mm}^2$ ,  $l=50 \text{ mm}$ . A rúd anyaga 40 Sh keménységű szilikonumi, melynek a kimért veszteségi tényezőjét a frekvencia függvényében a 8. ábra mutatja. A szilikonumi anyagi viselkedését először izotróp anyagmodellel a következő anyagjellemzőkkel írtuk le:  $E=1,18 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0,499$ . A nemlineáris anyagi viselkedés leírására a pontosabb modellben a Mooney-Rivlin-féle polinom potenciált használtuk. A rúd végére működő harmonikus gerjesztésre a rendszer választát a 9. ábra mutatja. A k és a b értékek kiszámítása a kísérleti modális analízis ismert összefüggéseivel történt.



8. ábra. 40 Sh keménységű szilikonumi veszteségi tényezője a frekvencia függvényében



9. ábra. A harmonikusan gerjesztett rúd elmozdulása a frekvencia függvényében

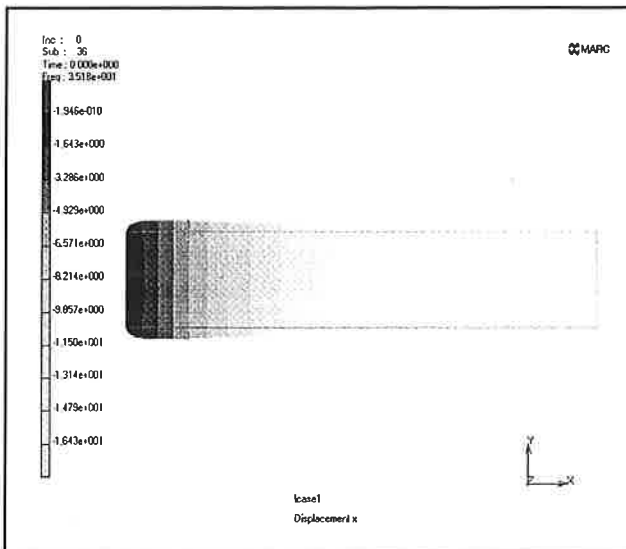
A maximális kitéréshez tartozó körfrekvencia:

$$\omega^* = \alpha \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot D^2} \quad (27)$$

A minőségi tényező (Quality factor):

$$Q = \frac{1}{2 \cdot D \cdot \sqrt{1 - D^2}} \quad (28)$$

ahol  $\alpha$  a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciája,  $D$  a Lehr-féle csillapítási tényező.



10. ábra. A gerjesztett rúd elmozdulása 35,18 Hz-nél

### Eredmények, további célkitűzések

A végeelemes számítások, valamint az analitikus számítások során kapott eredmények eltérést mutatnak (2. táblázat). Ez egyrészt a szilikonumik nemlineáris anyagi viselkedésével, másrészt egy valós rendszer idealizált passzív elemekkel történő közelítő helyettesítésével magyarázható.

2. táblázat. Egyik végén befogott húzott rúd merevsége és csillapítása

	FEM		Viszkoelasztikus modell	
	Anyagmodell		Kelvin-Voight	Maxwell
	izotróp	Mooney-Rivlin		
k [N/m]	5894	243	2360	5267
b [Ns/m]	0,06	0,006	3,4	4,6

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy az eddig ismert viszkoelasztikus modellekkel nem írhatjuk le a hiperelasztikus szilikonok viselkedését elfogadható hibával. Így további cél egy olyan, analitikusan könnyen kezelhető koncentrált paraméterű modell felállítása, mely az eddig ismerteknél pontosabban jellemzi a szilikonok viselkedését.

### Felhasznált Irodalom

[1] Bartha Z.: Gumiipari kézikönyv, Taurus-OMIKK Budapest, 1988  
 [2] Molnár L., Valenta L.: Bemessung des feinmechanischen Silikon-gumi-Gelenkes / 1999. szeptember, Ilmenau, 44. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium  
 [3] Molnár L., Halas J., Takács Á.: Önjáró szonda működésének végeelemes vizsgálata / 2000, április, Marosvásárhely, OGÉT 2000  
 [4] Valenta L., Molnár L., Huba A.: Szilikonumi alkalmazása finommechanikai vezetékekben és csuklóokban / 2000, április, Marosvásárhely, OGÉT 2000.