

## A peremelem-módszer és a vonatkozó programcsomagok fejlődéstörténete\*

SZEIDL György\*\*

**Kulcsszavak:** peremelem-módszer (PED), hővezetés, sík-rugalmasságtani problémák, szoftver rendszerek, fejlődéstörténet

**Keywords:** boundary element method (BEM), heat conduction, problems of plan elasticity, software systems, evaluation history

### Summary

**The boundary element method and evolution history of its program packages.** The essence of boundary element method (BEM) is presented shortly via two examples: the planar time independent heat conduction problem and the problem of plane elasticity for exterior regions (the latter serves as a basis for the solution of some problems in fracture mechanics). The evolution history of BEM and its software systems especially the BEASY and GPBEST are also reviewed. At last part of the paper is a comparison of publication data concerning VEM and BEM.

### Bevezetés

A végelem-módszer mellett némi fáziskéséssel jelent meg majd fejlődött ki a peremelem módszer (röviden PEM). Ma már kommerciális programok állnak a PEM alkalmazásában érdekelt felhasználók rendelkezésére. A módszer a mérnöki kurzusokon is előadásra kerül. A jelen tanulmány a fejlődéstörténet főbb állomásaira és a kommerciális programok főbb jellegzetességeire kíván rámutatni a végelem-módszerrel (VEM-mel) történő összehasonlítással. A tanulmány a stacioner hővezetési feladat esetén tekinti át röviden a PEM-et, majd formális általánosítással kitér a rugalmasságtan síkfeladataira is. Áttekinti a módszer fejlődéstörténetének főbb állomásait, majd a legfontosabb kereskedelmi rendszerek adatait ismerteti. Végül összehasonlítja a PEM és a VEM módszereket a számok tükrében. A tanulmányt rövid összefoglaló zárja.

### Mi a peremelem-módszer?

A módszert a stacioner hővezetési feladat esetén ismertetjük. Tekintsük az 1. ábra szerint az  $x_1, x_2$  koordinátáson az  $L = L_u \cup L_t$  görbe által határolt belső  $S_i$  és külső  $S_e$  tartományokat. A sík  $P(x_1, x_2)$  és  $Q(\xi_1, \xi_2)$  pontjainak rendre  $r_M$  és  $r_Q$  a helyvektora és  $R$  a távolsága. A  $P$  pont  $Q$  ponthoz viszonyított helyvektora  $r = r_1 e_1 + r_2 e_2$ ,  $|r| = R$ , ahol  $e_k$  ( $k = 1, 2$ ) az  $x_1, x_2$  tengelyek egységvektora.

A külső normális egységvektort jelölje:  $n = n_1 e_1 + n_2 e_2$ . Ha egységnyi a hővezetési tényező, akkor az  $S_i$  belső tartományra nézve az (1)

$$\Delta_M u(M) + b(M) = 0 \quad M \in S_i$$

$u(M_o) = \hat{u}(M_o)$   $M_o \in L_u$ ;  $t(M_o) = \hat{t}(M_o)$   $M_o \in L_t$ , a stacioner hőáramlás hővezetési egyenlete és a vonatkozó peremfeltételek, ahol  $\Delta_M = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$

a síkbeli Laplace-operátor,  $u(M)$  a keresett hőmérsékletmező,  $b(M)$  a hőforrássűrűség, a hőáramvektor a peremen:

$$t(M_o) = n_1 \partial u / \partial x_1 + n_2 \partial u / \partial x_2, \quad \hat{u}(M_o)$$

és  $\hat{t}(M_o)$  pedig a hőmérsékletmező és a hőáram előírt értéke az  $L_u$  és  $L_t$  jelű peremíveken.

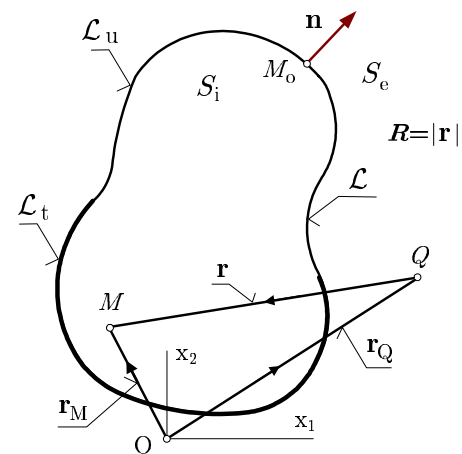


Fig. 1. ábra

Az

$$U(M, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R(M, Q)} \quad \text{és} \quad (2)$$

$$T(M_o, Q) = -\frac{\mathbf{n}(M_o, Q) \cdot \mathbf{r}(M_o, Q)}{2\pi R^2(M_o, Q)} \quad M, M_o \neq Q$$

képletek az ún.  $U(M, Q)$  első- és  $T(M_o, Q)$  másodrendű alapg megoldásokat értelmezik. Itt  $U(M, Q)$  az  $M$

\* A IX. Országos Törésmechanikai Szemináriumon, 2006. október 17-én, Miskolctapolcán elhangzott előadás szerkesztett változata

\*\*Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék, 3515 Miskolc-Egyetemváros

## Kísérleti mechanika

## Experimental mechanics

pont hőmérséklete a végtelen síkon, ha a  $Q$  pontban egységnyi hőforrás működik. Ugyanígy  $T(M_o, Q)$  az

egységnyi hőforráshoz tartozó hőáram az  $M_o$  pontban elhelyezett  $\mathbf{n}$  normálisú egységnyi hosszú vonalelemre merőlegesen.

$$\text{Az } u(Q) = \oint_L [U(M_o, Q)t(M_o) - T(M_o, Q)u(M_o)] ds_{M_o} + \int_{S_i} U(M, Q)b(M) dA_M, \quad Q \in S_i \quad (3a)$$

$$\text{és a (3b): } c(Q_o)u(Q_o) = \oint_L [U(M_o, Q_o)t(M_o) - T(M_o, Q_o)u(M_o)] ds_{M_o} + \int_{S_i} U(M, Q_o)b(M) dA_M, \quad Q = Q_o \in L$$

összefüggések, ahol  $c = 1/2$ , ha sima a peremgörbe a  $Q_o$  pontban (ha nem akkor  $\vartheta/2\pi$ , ahol  $\vartheta$  a  $Q_o$  pontbeli két érintő által bezárt szög), az ún. Green-féle képletek.

Az első Green-féle képlet szerint bármely  $Q \in S_i$  pontban kvadratúrákkal számítható a stacionér hővezetési feladat megoldása, feltéve, hogy az  $L$  peremgörbe minden egyes  $M_o$  pontjában ismert az  $u(M_o)$  hőmérséklet és a  $t(M_o)$  hőáram. Mivel egy perempontban csak a két mennyiség egyike ismert a peremfeltételekből a megoldás alatti előállítás csak hipotetikus jelentőségűnek tűnik. Vegyük azonban észre, hogy (3b) egyenlet esetén azon perempontban, ahol ismert a peremfeltételekből az  $u$  hőmérséklet, ismeretlen a  $t$  hőáram és megfordítva, azon perempontban, ahol ismert a peremfeltételekből az  $t$  hőáram, ismeretlen az  $u$  hőmérséklet. Másként fogalmazva (3b) integrálegyenlet megoldásával meghatározható a hőmérséklet (azokban a pontokban ahol ismert a hőáram), és a hőáram (azokban a pontokban ahol ismert a hőmérséklet). Mivel az utóbbi egyenlet megoldásával a teljes peremen ismertté válik mind a hőmérséklet, mind pedig a hőáram megnyílik a lehetőség a hőmérsékletmező tetszőleges pontban történő meghatározására a megoldás (3a) alatti előállításának felhasználásával.

A (3b) integrálegyenlet numerikus megoldásának előállítása érdekében  $n_{be}$  számú peremelemre – ezeket rendre  $L_e$  jelöli (a viszonyokat szemléltető 2. ábrán  $n_{be} = 8$ ,  $e = 1, \dots, 8$ ) – bontjuk fel. Az egyes peremelemeken az elem kezdő, középső és végpontját csomópontnak nevezzük és lokálisan sorszámozzuk: a sorszámok a pozitív haladási irányban (ebben az irányban haladva a tartomány mindig a baloldalon van) növekednek, értékük 1, 2 és 3 lehet. Jelölje  $n_{bn}$  az összes csomópont számát. Az ún. globális csomóponti sorszámok ugyancsak a pozitív haladási irányban növekednek és az  $1, \dots, n_{bn}$  intervallumban találhatóak – az ábrán  $n_{bn} = 16$ . Az egyes elemeket az  $\eta \in [-1, 1]$  intervallumra képezzük le és az

$$N^1(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\eta-1) \quad N^2(\eta) = 1-\eta^2 \quad N^3(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\eta+1), \quad (4)$$

kvadratikus alakfüggvények, valamint a hőmérsékletmező, illetve a hőáram az elem csomópontjaiban vett

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} {}^e u_1 \\ {}^e u_2 \\ {}^e u_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}^{(e)} = \begin{bmatrix} {}^e t_1 \\ {}^e t_2 \\ {}^e t_3 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

értékeinek, továbbá az

$$\mathbf{N} = [N^1(\eta) \quad N^2(\eta) \quad N^3(\eta)] \quad (6)$$

mátrixnak felhasználásával a

$$u[s(\eta)] = \mathbf{N}(\eta) \mathbf{u}^{(e)}, \quad t[s(\eta)] = \mathbf{N}(\eta) \mathbf{t}^{(e)} \quad s \in L_e \quad (7)$$

képletekkel közelítjük az adott  $e$  elemen belül a hőmérsékletet és a hőáramot. A fenti előállítások felhasználásával a  $j$ -edik ( $j = 1, \dots, n_{bn}$ ) perempontot tekintve a

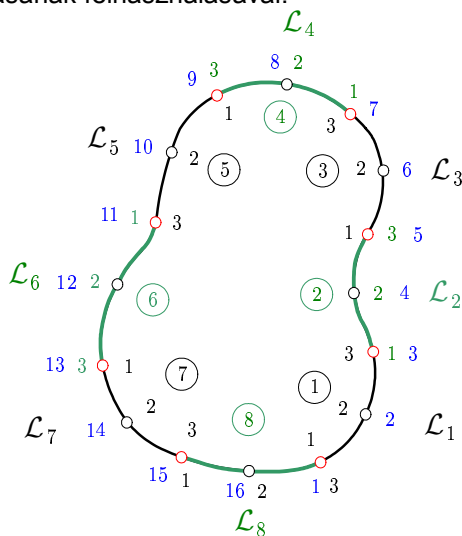


Fig. 2. ábra

## Kísérleti mechanika

## Experimental mechanics

$$c(Q_j)u(Q_j) + \sum_{i=1}^{n_{bc}} \int_{L_c} T[M_o(\eta), Q_j] \mathbf{N}(\eta) ds(\eta) \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n_{bc}} \int_{L_c} U[M_o(\eta), Q_j] \mathbf{N}(\eta) ds(\eta) \mathbf{t} + \int_{S_j} U(M, Q_j) b(M) dA_M \quad j = 1, \dots, n_{bn} \quad (8)$$

egyenlet következik a (3b) integrálegyenletből. Mivel egy csomópontban egy ismeretlen van (ez vagy a hőmérséklet vagy a hőáram csomópontbeli értéke) az ismeretlenek száma – ami nyilvánvalóan  $n_{bn}$  – megegyezik a fenti egyenletek számával. Ezek az egyenletek a

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n_{bn}} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n_{bn}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n_{bn}1} & h_{n_{bn}2} & \dots & h_{n_{bn}n_{bn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n_{bn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n_{bn}} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n_{bn}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n_{bn}1} & g_{n_{bn}2} & \dots & g_{n_{bn}n_{bn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_{n_{bn}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n_{bn}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

alakban egyesíthetők, ahol a  $h_{mn}$  mátrixelemek a  $T[M_o(\eta), Q_j]$  másodrendű alapgöndást tartalmazó integrálokból és az azt megelőző tagból állnak össze, a  $g_{mn}$  mátrixelemek az  $U[M_o(\eta), Q_j]$  elsőrendű alapgöndást tartalmazó integrálokból adódnak,  $u_1, \dots, u_{n_{bn}}$  és  $t_1, \dots, t_{n_{bn}}$  a csomópontokban tekintett hőmérséklet és hőáram globális sorszámozással, végül  $b_1, \dots, b_{n_{bn}}$  a tartományi integrál értékét jelöli.

A (9) egyenletrendszer megoldva valamennyi csomópontban ismerjük a hőmérsékletet és a hőáramot: Ezek birtokában (7) képletek a hőmérsékletmezőt adó összefüggésbe történő helyettesítésével a hőmérsékletmező, és ezen előállítás deriválásával maga a hőmérsékleti gradiens is számíthatóvá válik az  $S_i$  tartomány pontjaiban.

**Számos törésmechanikai feladat tárgyalható rugalmasságtan síkfeladatként**, oly módon, hogy a megoldandó feladat az  $S_e$  külső tartományra vonatkozó peremérték-feladat. Indexes jelölésmódot alkalmazva lerögzítjük, hogy a görög index az 1, 2 értéket veheti fel, a kettőzött indexek szerint összegezni kell. Jelölje rendre  $u_\lambda$  és  $t_\lambda$  az elmozdulás-vektort és feszültségvektort (a hőmérséklet és hőáram analogonjait). Legyen  $e_{\kappa\lambda}$  és  $t_{\kappa\lambda}$  az alakváltozási és feszültségi tenzor. Legyen továbbá  $b_\lambda$  a térfogati terhelés sűrűsége (a hőforrassűrűség analogonja),  $\mu$  és  $\nu$  a nyírési rugalmassági modulus és a Poisson-szám. A Kronecker-szimbólumot a szokott módon írjuk:  $\delta_{\kappa\lambda}$ . A bevezetett jelölésekkel a rugalmasságtan alapegyenlete sík alakváltozás esetén:

$$\underbrace{\left[ \Delta_M \delta_{\lambda\sigma} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla_\lambda \nabla_\sigma \right]}_{D_{\lambda\sigma}} u_\sigma + \frac{b_\sigma}{\mu} = 0 \quad M \in S_i \quad (10a)$$

$$u_\lambda(Q) = e_{\lambda\beta}(\infty) \xi_\beta + \oint_L [U_{\lambda\kappa}(M_o, Q) t_\kappa(M_o) - T_{\lambda\kappa}(M_o, Q) u_\kappa(M_o)] ds_{M_o} + \int_{S_e} U_{\lambda\kappa}(M, Q) b_\kappa(M) dA_M, \quad Q \in S_e, \quad (12a)$$

$$c_{\lambda\kappa} u_\kappa(Q_0) = e_{\lambda\beta}(\infty) \xi_{0\beta} + \oint_L [U_{\lambda\kappa}(M_o, Q_0) t_\kappa(M_o) - T_{\lambda\kappa}(M_o, Q_0) u_\kappa(M_o)] ds_{M_o} + \int_{S_e} U_{\lambda\kappa}(M, Q_0) b_\kappa(M) dA_M, \quad (12b)$$

$$Q = Q_0 \in L$$

Az alapegyenlethez az

$$u_\lambda(M_o) = \hat{u}_\lambda(M_o) \quad M_o \in L_u \quad t_\lambda(M_o) = \hat{t}_\lambda(M_o) \quad M_o \in L_t \quad (10b)$$

$$\text{és a} \quad t_{\kappa\lambda}(\infty) = \hat{t}_{\kappa\lambda} \quad (10c)$$

peremfeltételek társulnak, ahol a kalap az előírt értékeket jelzi (az előírt elmozdulást és feszültséget az  $L_u$ -n, illetve  $L_t$ -n, illetve a feszültségi tenzort a végtelen távoli pontban).

A (10a) alapegyenlethez tartozó (11a):

$$U_{\lambda\rho}(M, Q) = -\frac{1}{8\pi\mu} \frac{1}{1-\nu} [(3-4\nu)\delta_{\lambda\rho} \ln R - \frac{r_\lambda r_\rho}{R^2} + \frac{7-8\nu}{2} \delta_{\kappa\rho}]$$

elsőrendű alapgöndással  $u_\lambda(M) = U_{\lambda\rho}(M, Q) f_\rho(Q)$  a végtelenbe nyúló rugalmas sík  $M$  pontjának elmozdulása a  $Q$  ponthoz kötött  $f_\rho(Q)$  erő hatására. (10a) alapegyenlethez tartozó (11b):

$$T_{\kappa\lambda}(M_o, Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{R^2} [(1-2\nu)(n_\kappa r_\lambda - r_\kappa n_\lambda - n_\sigma r_\sigma \delta_{\kappa\lambda}) - 2n_\sigma r_\sigma \frac{r_\kappa r_\lambda}{R^2}]$$

másodrendű alapgöndással  $t_\lambda(M_o) = T_{\rho\lambda}(M_o, Q) f_\rho(Q)$  a feszültség értéke az  $M_o$  pontbeli  $n_\sigma$  normálisú vonalelemen. Felhasználva az idegen munkák egyenlőségét igazolhatók a külső tartományra vonatkozó ún. Somigliana-féle képletek (21a és b):



## Kísérleti mechanika

## Experimental mechanics

A képletekben  $e_{,\beta}(\infty)$  a végtelen távoli pontban az alakváltozási tenzor (ez az ottani előírt feszültségekből a Hooke-törvény felhasználásával számítható),  $\xi_{o\beta}$  pedig a  $Q_o$  pont koordinátáit jelöli.

Az első külső tartományra vonatkozó Somigliana-féle képlet szerint bármely  $Q \in S_e$  pontban kvadratúrákkal számítható az elmozdulás-mező feltéve, hogy az  $L$  peremgörbe minden egyes  $M_o$  pontjában ismert az  $u_{,\kappa}(M_o)$  elmozdulás és a  $t_{,\kappa}(M_o)$  feszültség. Mivel egy perempontban csak a két vektormennyiség egyike ismert a peremfeltételekből az elmozdulás-mezőre vonatkozó megoldás alatti előállítása csak hipotetikus jelentőségűnek tűnhet. Vegyük azonban észre, hogy (12b) egyenlet esetén azon perempontban, ahol ismert a peremfeltételekből az  $u_{,\kappa}$  elmozdulásvektor ismeretlen a  $t_{,\kappa}$  feszültségvektor és megfordítva, azon perempontban, ahol ismert a peremfeltételekből a  $t_{,\kappa}$  feszültségvektor ismeretlen az  $u_{,\kappa}$  elmozdulásvektor. Másként fogalmazva az (12b) integrálegyenlet megoldásával, ugyanúgy mint a hővezetési feladat esetén meghatározható az elmozdulásvektor (azokban a pontokban ahol ismert a feszültségvektor), és a feszültségvektor (azokban a pontokban ahol ismert az elmozdulásvektor). Mivel az utóbbi egyenlet megoldásával a teljes peremen ismertté válik mind az elmozdulásvektor, mind pedig a feszültségvektor megnyílik a lehetőség az elmozdulásvektor meghatározására az  $S_e$  tetszőleges  $Q$  pontjában (12a) alatti előállítás felhasználásával.

Az előzőek, a gondolatmenetre helyezve a hangsúlyt, áttekintették a peremelem-módszer lényegét a stacioner hővezetési feladat és a rugalmasságtan külső tartományra vonatkozó síkfeladata esetén. Számos kérdésről nem esett szó (pl. (a) az alapmegoldások szingulárisak, ha  $Q = M$ , ennek fényében különös figyelmet kíván a peremen vett integrálok számítása, (b) a tartományi integrálok, ha nem zérus a hőforrassűrűség illetve a tartományi teher transzformálhatók a peremgörcsére, mi ennek a technikája?).

A továbbiak röviden összehasonlítják a peremelem- és a végeelem-módszer előnyeit és hátrányait egymással szemben.

**Előnyök és hátrányok a PEM esetén:** (1) A közelítő megoldás pontosan teljesíti a mezőegyenleteket és az alapegyenletet, a peremfeltételek azonban csak közelítőleg teljesülnek (előny). (2) A feladat mérete (dimenziója) eggyel csökken (előny). (3) Ugyanazon pontosság eléréséhez lényegesen kisebb méretű, de nem szimmetrikus együttható-mátrixú ER-t kell numerikusan megoldani (előny is hátrány is). (4) Szinguláris integrálok meghatározását igényli a megoldandó ER együtthatómátrixának számítása (hátrány). (5) A PEM alkalmazásához ismerni kell az

alapmegoldásokat -- ez anizotrópia esetén jelent gondot (hátrány). (6) A módszer alapjai (potenciáleméleti alapok, rugalmasságtani alapok) nem részei a hagyományos mérnöki kurzusoknak (hátrány).

**Előnyök és hátrányok a VEM esetén:** (1) A mezőegyenletek és peremfeltételek csak integrál értelemben teljesülnek (hátrány). (2) Nem változik meg a feladat dimenziója (a két D-s feladat két D-s marad etc.) -- ez inkább hátrány. (3) Nincs szükség szinguláris integrálok számítására a merevségi mátrix számítása során (előny). (4) Viszonylag nagyszámú egyenlet megoldására van szükség. (hátrány). (5) Szimmetrikus és sávszerkezetű (diagonális szerkezetűvé tehető) a megoldandó ER. (előny). (6) Nincs szükség alapmegoldásokra, de járatosság kívánatos a variációszámítás egyes eredményei tekintetében (előny is, hátrány is). (7) A módszer alapjai (virtuális munka és teljesítmény elv, variációszámítás) valamilyen formában részei a hagyományos mérnöki kurzusoknak (előny).

## A PEM kialakulásának rövid története

### A kezdetek

A peremelem-módszer előzményei a 60-as évek elejére nyúlnak vissza amikor Hess és Smith [1,1962] [2,1967] másodfajú Fredholm-típusú integrálegyenletekre vezette vissza az egyszerű forráseloszlás forgásfelületen történő meghatározásának feladatát. Az egyenlet numerikus megoldása révén lehetővé vált az egyenletesen áramló közegbe helyezett felület áramlási képre gyakorolt hatásának számítása. Ez a két úttörő jellegű munka azonban még mindig inkább tekinthető egy speciális feladat számszerű megoldásának, mint egy új numerikus módszer felé utat nyitó eredménynek.

Az első olyan tanulmány amely tudatosan kihasználta a peremgörcsben tekintett Green-féle képletet, hangsúlyozva egyúttal, hogy ez az egyenlet egy harmonikus függvény és normálirányú deriváltjai között fennálló összefüggés, Jaswon és Ponter tollából ered [3,1963]. Az idézett dolgozat a csavarási feladat deplanációs függvényének meghatározására vezetett le másodfajú integrálegyenletet, numerikus úton számítva a deplanáció értékét a peremgörcsben, majd ennek birtokában a nyírófeszültségeket illetve a csavarási merevséget is meghatározta.

Ugyanebben az évben két további tanulmány jelent meg – Jaswon [4,1963] és Symm [5,1963] – melyek az elektromos töltéseloszlás meghatározására szolgáló elsőfajú Fredholm-típusú integrálegyenlet levezetését [4,1963] és a numerikus megoldást [5,1963] mutatják be. A perem kis elemekre volt felbontva, a forrassűrűséget pedig állandó értékűnek tekintették az elemeken. A [3,1963], [4,1963] és [5,1963] alatti tanulmányok valójában már tartalmazták, az ún. direkt

## Kísérleti mechanika

## Experimental mechanics

módszer teljes megalapozását. Ennek ellenére nem keltettek akkora figyelmet mint amekkorát valójában érdemeltek volna. Ebben minden valószínűség szerint az is közrejátszott, hogy a 60-as évek során robbanásszerűen elterjedt a végeelem-módszer.

### Esetenkénti publikációk: a 60-as évek második fele és a 70-es évtized

A döntő lépést a módszer rugalmasságtani ki-fejlesztésére tekintetében Rizzo tette meg [6,1967]. Dolgozata a sík feladatok megoldására nyújt módszert integrálegyenleteket állítva elő a tartomány peremén ébredő feszültségek és a peremen tekintett elmozdulások között. A megoldás során a tartomány pereme nagyszámú kis elemre – peremelemre – lett felosztva és egy elemen belül állandó értékűnek tekintették az elmozdulásokat és feszültségeket. A közelítés jellege miatt a peremen vett integrálok zárt alakban is kiszámíthatók, de a kielégítő pontosságú megoldás viszonylag sok elemet igényelt.

Ugyanez a helyzet Cruse térbeli feladatokkal kapcsolatos dolgozatát illetően [7,1969], amelyben a test felületét síkháromszögekből álló hálóval közelítették feltételezve, hogy az ismeretlen függvény állandó értékű a háromszögeken.

A direkt módszer egyenleteinek előállítására és feladatok megoldására képlékeny testekre kis alakváltozások mellett (geometria linearitás mellett) Banerjee, Cathie és Davis szerzőhármassal nevéhez fűződik [8,1979].

Az első törésmechanikai kérdésekkel foglalkozó cikket Cruse írta [9,1975].

Az első szakkönyv szerzője C. A. Brebbia [10,1978].

1978-ban megalakul Southampton-ban egy kutatócsoport C. A. Brebbia vezetésével. Itt kezdődik meg 1982-ben a BEASY kommersziális csomag fejlesztése.

### További szakkönyvek és a kommersziális rendszer(ek) megjelenése: a 80-as évtized

Érdemes megemlíteni felsorolásszerűen Banerjee és Butterfield könyvét [11,1981] (a könyv oroszul is megjelent 1984-ben), Brebbia, Telles és Wrobel közös könyvét [12,1984], amely egy nagyon jó bevezető jellegű könyv, továbbá összefoglaló jellege miatt a [12,1988] könyvet.

Az 1986-os év az Engineering Analysis with Boundary Elements című folyóirat (ez a szakterület egyetlen kizárólag erről a területről publikáló szaklapja) alapításának éve. Cikkek a szakterületről nagy számban jelennek meg más folyóiratokban is: Numerical Methods in Engineering, Computational Mechanics, Computers and Structures etc.

## Kereskedelmi forgalomban kapható rendszerek

Az 1. táblázat néhány kommersziális peremelemes rendszer adatait tartalmazza.

1. táblázat. Kereskedelmi rendszerek  
Table 1: Commercial systems

Év	Program neve	Fejlesztő cég	URL cím
1978	SURFES	Kawasaki HeavyInd., Japan	
1980	CASTOR 3D	CETIM Franciaország	www.cetim.fr
1981	BEASY	Computational Mechanics, UK	www.beasy.com
1982	BETSY	T-Programm Gmbh, Germany	
1983	GPBEST	BEM Software Technology Corporation, USA	www.gpbest.com

Az 1. táblázatban felsorolt programrendszerek közül a BEASY és a GPBEST emelhető ki.

A program honlapjáról vett 3. ábra érzékelteti a BEASY programrendszer moduláris szerkezetét, sokoldalúságát és azt is, hogy **törésmechanikai célokra is kiválóan alkalmazható**. A BEASY Crack Wizard nevű modulja nemcsak a feszültség intenzitására jellemző értékeket adja meg, hanem az is meghatározható, hogyan fog növekedni a repedés. Mindez a háló automatikus ismételt újra generálásával társul, ha ez szükséges. A modul használata ugyanakkor nem igényel jelentős gyakorlatot az összetett 3D-s CAD modellek és a vonatkozó hálógenerálás tekintetében. Mivel könnyen megtanulható, a programot alkalmazó mérnök a valóságot jól leíró modellválasztásra fordíthatja figyelmét. A program és az egyes modulok áráról, illetve a megoldható feladatok méretéről nincs információ a honlapon, ennek beszerzéséhez a gyártóhoz kell fordulni. Maga a program Windows NT, 2000, XP operációs rendszerek alatt, illetve a Unix alapú munkaállomásokon futtatható.

A GPBEST néhány adatát táblázatosan foglaltuk össze:

2. táblázat. A GPBEST szoftver néhány adata  
Table 2: Some data of the GPBEST software

Leírás	Rész-tartomány	Szabadság-fok	Ár (USD)
Egy processzor	20 db	24 000	12 500
Egy processzor	40 db	120 000	16 500
Több processzor	20 db	24 000	17 500 - 37 000
Több processzor	40 db	120 000	24 000 - 60 000
Server	40 db	120 000	megállapodásos



## Kísérleti mechanika

## Experimental mechanics

A 120 000 szabadságfok nagyon sok: térbeli feladatoknál csak test felületét kell felosztani elemekre!

A program Hewlett Packard HPU10.xx-11.x, IBM Aix 4.x, Sun Solaris 8.x és Silicon Graphics munkaállomásokon tovább személyi számítógépen futtatható Windows 2000 és XP operációs rendszerek alatt.

A megoldható feladatok köre igen széles, felöleli többek között a lineáris statikai és dinamikai feladatokat, a hőfeszültségek számítását, a hővezetési feladatot, az akusztikai feladatokat, az érintkezési feladatokat és nem utolsósorban a törésmechanikai feladatok körét is.

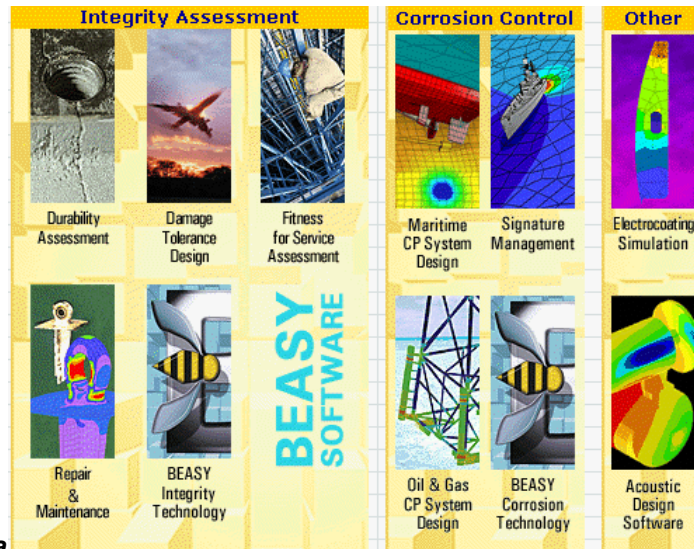


Fig. 3. ábra

**Why compromise accuracy of Life Prediction?**  
 With BEASY's fully automatic software product durability can be quickly and accurately predicted.

- Product durability prediction;
- Easy crack modelling;
- Automatic crack growth;
- High accuracy;
- Provides the critical information.

**Product Durability Prediction**  
 BEASY provides a range of tools for assessment of the residual strength of damaged or ageing steel structures. It can be used as part of the design/analysis process to predict the impact of component and material degradation caused by various loads, manufacturing and/or service process-related defects.

**BEASY provides the critical information needed:-**

- Will the crack grow?
- Will it grow in an unstable fast or slow slow fracture?
- At what rate will it grow?
- Do we have the data given before becoming unstable?
- What is the residual strength?

**Automatic Crack Growth**  
 BEASY not only predicts stress intensity factor but also predicts the crack will grow. Remodelling is automatically performed by BEASY when necessary. The prediction is highly automated with a crack growth record displaying tool.

**High Accuracy**  
 Historically stress intensity factor and crack growth data has been approximated using standard reference solutions. The BEASY approach uses the real geometry, loading and material providing a highly accurate basis for life prediction. The results also include the effects of load redistribution, multiple cracks, residual peak load crack charge stabilizing.

**Easy Crack Modelling**  
 BEASY features the power of 3D in automatic crack modelling. If a user's simple version of the desired crack analysis performed by engineers. Simply select the shape, size and location of the crack and BEASY will automatically remesh the model to include the crack and complete the stress-intensity data.

**Computer Requirements**  
 Windows 95, 98, NT or Linux Workstations.  
 BEASY is compatible with existing modelling tools such as PATRAN and IDEAS.  
 Windows users can also use BEASY's own modelling tool.

## Kísérleti mechanika

## Experimental mechanics

### A FEM és PEM néhány publikációs adat függvényében

Előjáróban szeretnénk lerögzíteni, hogy a tanulmány jelen szakaszában közölt eredményeket Jaroslav Mackerle kutatási eredményeiből válogattuk. A 3. táblázat az első megjelent könyvek bibliográfiai adatai mellett az 1999-ig megjelent szakkönyvek számát is feltünteti.

3. táblázat. Az első könyvek  
Table 3: The first books

FEM
1967-1999: 467 könyv
O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: The Finite element method in structural and continuum mechanics. McGraw Hill, 1967
VEM
1978-1999: 223 könyv
C. A. Brebbia: The boundary element method for engineers. Pentech Press, London, 1978

További érdekessége van a 4. ábrának, amely évenkénti bontásban, oszlopdiagramban tünteti fel a kiadott könyvek számát az idő (évek) függvényében. Mindkét esetben a kezdeti gyors növekedést egy állandósult szakasz és némi csökkenést mutató periódus követi.

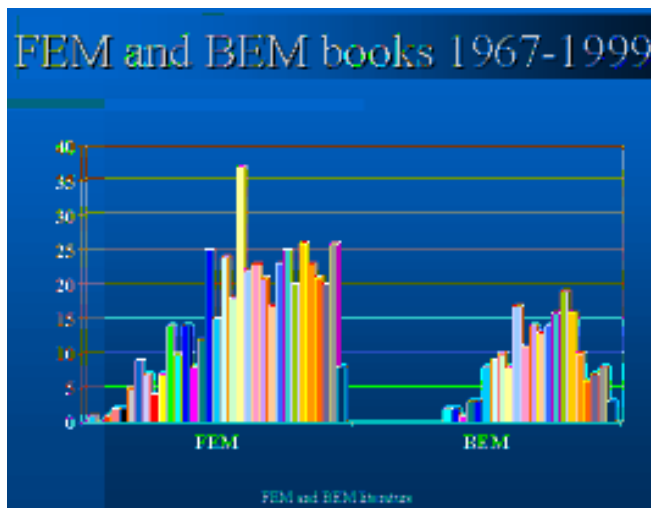


Fig. 4. ábra. Könyvek évenkénti megoszlása

Évenkénti bontásban a publikált tanulmányok számát tekintve meglepő, hogy a VEM területén megjelent cikkek száma egy, viszonylag és hosszú monoton növekedést mutató periódus után 1994 körül stabilizálódott az évi 7000 körüli szinten. A PEM területén az 1990-ig tartó növekedési periódust egy, az évi 1000 körüli kisebb nagyobb oszcillációt mutató periódus követi.

du követi enyhe lecsengéssel a végén. A csökkenésnek valószínűleg kettős oka van: (a) a lineáris feladatok területén jelentős eredmények születettek, és a kutatás egyre inkább túllép ezen a feladatkörön a nemlineáris feladatok felé, és (b) a hálónélküli numerikus technikák (mesh less methods) megjelenése és intenzív kutatása erőket von el a hagyományos területekről.

4. táblázat. A publikált tanulmányok száma  
Table 4: Number of the published studies

Folyóiratban és konferencia kiadványban	
FEM	VEM
Mintegy 103 579 tanulmány	Mintegy 14 772 tanulmány
Jelenleg mintegy 7000 új cikk évente	Jelenleg mintegy 700 új cikk évente
A FEM és PEM cikkeket 1600 folyóiratban jelentetik meg.	

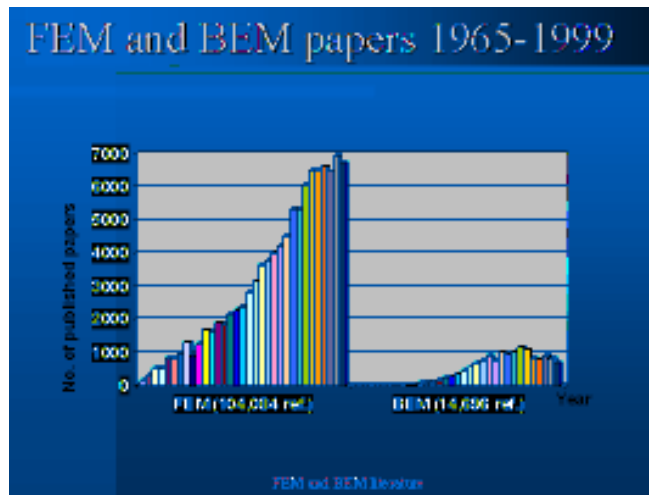


Fig. 5. ábra. Folyóiratcikkek évenkénti bontásban

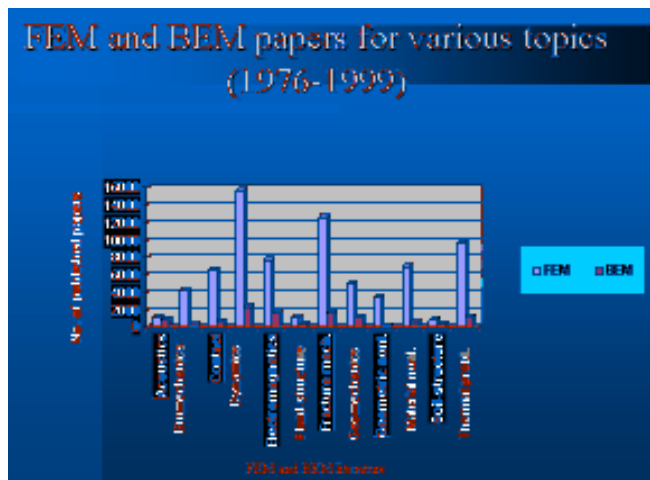


Fig. 6. ábra. Folyóiratcikkek témánkénti megoszlása

Érdekes a folyóiratcikkek tématerületek szerinti megoszlását is szemügyre venni. A 6. ábra oszlopdiagramja akusztika (acoustics), biomechanika (biomechanics), érintkezési feladatok (contact), dinamika

## Kísérleti mechanika

## Experimental mechanics

(dynamics), elektromágnesesség (electromagnetics), folyadék és szerkezet (fluid-structure), törésmechanika (fracture mechanics), geomechanika (geomechanics), geometriailag nem lineáris feladatok (geometric. nonlin.), talajmechanika (soil mechanics) és végül hőfeladatok (thermal problems) felbontásban szemlélteti a megjelent cikkek számát mind a VEM, mind pedig a FEM esetén 1999-ig. Feltűnő, hogy a PEM esetén mindössze néhány cikk foglalkozik a geometriailag nemlineáris feladatokkal.

### Összefoglalás

A tanulmányban röviden áttekintettük, hogy mi a peremelem-módszer lényege. Ehhez kötődően időfüggetlen feladatok esetén foglalkoztunk a direkt módszer alapjaival a hővezetési egyenletre, és röviden vázoltuk a külső tartományra megfogalmazott sík rugalmasságtani feladatok esetén a módszer alapjait.

Foglalkoztunk a PEM történetével külön is hangsúlyozva, hogy: (a) Az első publikáció 1963-ban jelent meg. (b) A 70-es évtizedre az esetleges publikációs tevékenység volt a jellemző. (c) Igazi áttörést a 80-as évtized és az azt követő időszak hozott.

Ami a kommerciális rendszereket illeti: a jelenleg kapható rendszerek közül kitüntetett figyelmet kapott a BEASY (Boundary Element Analysis System, Southampton, UK) és a GPBEST (General Purpose Boundary Element Software Technology, New York, USA)

Tanulmányunkban végül összehasonlítottuk a VEM és PEM módszerek publikációs adatait. A közölt adatok segíthetik a két módszert elhelyezni a tudományos kutatás területén.

**Köszönetnyilvánítás:** Szerző köszönetét fejezi ki Prof. Dr. Jaroslav Mackerle-nek azért, hogy jelen tanulmányában felhasználhatta kutatási eredményeit, külön is kiemelve a BEM-re és a FEM-re vonatkozó publikációs adatokat.

### Hivatkozások

1. J.-L. Hess and Smith R.-M. O.: *Calculation of potential flow about three dimensional bodies*, report no. e.s. 40622. Technical report, Douglas Aircraft Co., Long Beach, 1962.
2. J.-L. Hess and Smith R.-M. O.: *Calculation of potential flow about arbitrary bodies*. Pergamon Press, 1967.
3. M.-Jaswon and A.-R. Ponter: *An integral equation solution of the torsion problem*. Proc. Roy. Soc. Ser. A., 273:237–246, 1963.
4. M.-Jaswon: *Integral equation methods in potential theory i*. Proc. Roy. Soc. Ser. A., 275. pp. 23–32, 1963.
5. G.-T. Symm: *Integral equation methods in potential theory ii*. Proc. Roy. Soc. Ser. A., 275. pp. 33–46, 1963.
6. R.-J. Rizzo: *An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics*. Q. J. Appl. Math., 25. pp. 83–95, 1967.
7. T.-E. Cruse: *Numerical solutions in three dimensional elastostatics*. Int. J. Solids Struct. 5. pp. 1259–1274, 1969.
8. P.-K. Banerjee, D.-N. Cathie, and T.-G. Davies: *Two-, and three dimensional problems of elastoplasticity*, pp. 65–95. Applied Science Publishers LTD, London, 1979.
9. T.-E. Cruse: *Boundary integral equation method for three dimensional fracture mechanics analysis*. Technical report, AFOSR-TR-75- 0813, Accession No. ADA 01166, 1975.
10. C.A. Brebbia: *The boundary element method for engineers*. Pentech Press, London, 1978.
11. P.-K. Banarjee and R.-Butterfield: *Boundary Element Methods in Engineering Science*. McGraw Hill, London, 1981.
12. C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, and L.C. Wrobel: *Boundary element techniques*. Springer Verlag, Berlin, 1984.
13. J.-Mackerle and C.-A. Brebbia: *The boundary element reference book*. Computational Mechanics Publications, Southampton Boston and Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, London, Paris, Tokyo, 1988.